

# IFT503/711 - Exercices sur P et NP

## Solutions

Manuel Lafond

Hiver 2020

### Exercice 1

Montrez que  $P \subseteq NP \cap \text{co-NP}$ .

#### Solution.

On sait que  $P \subseteq NP$ , car s'il y a une MT déterministe  $M$  qui accepte un langage  $L \in P$ ,  $M$  peut être vue comme une MT non-déterministe qui n'a qu'un seul choix pour chaque transition. Le langage accepté par  $M$  est  $L$ , et donc  $L \in NP$ .

On montre ensuite que  $L \in P \iff \bar{L} \in P$  (dans le jargon, on dit que  $P$  est fermé sous le complément). Ceci est relativement facile à voir : une MT qui décide  $L$  peut servir directement à déterminer si un mot est dans  $\bar{L}$  ou non. Voici les détails.

Soit  $L \in P$ , et soit  $M$  une MT qui décide  $L$  en temps polynomial. Considérez  $\bar{L}$ . On a  $w \in L \iff w \notin \bar{L}$ . Donc, on peut prendre la machine  $M'$  qui décide  $\bar{L}$  de la façon suivante : sur entrée  $w$ , simuler  $M$  sur entrée  $w$  et retourner le résultat inverse. Lorsque  $w \in \bar{L}$ ,  $M$  rejettera  $w$  et donc  $M'$  l'acceptera. Inversement, lorsque  $w \notin \bar{L}$ ,  $M$  acceptera  $w$  et  $M'$  le rejettera. Donc  $M'$  décide  $\bar{L}$ . Puisque simuler  $M$  prend un temps polynomial, ceci veut dire que  $\bar{L} \in P$ .

Puisque  $L$  a été choisi arbitrairement dans  $P$ , ceci montre que  $L \in P \iff \bar{L} \in P$ . En particulier,  $\bar{L} \in NP$ . Puisque le complément de  $L$  est dans  $NP$ , on a  $L \in \text{co-NP}$ . Puisque ceci est vrai pour tout  $L \in P$ , on a  $P \subseteq \text{co-NP}$ .

### Exercice 2

Un langage  $L$  est co-NP-complet si  $L \in \text{co-NP}$ , et si, pour chaque langage  $A \in \text{co-NP}$ ,  $A \leq_P L$ .

Montrez qu'un langage  $L$  est NP-complet si et seulement si  $\bar{L}$  est co-NP-complet.

**Solution.**

( $\Rightarrow$ ) : supposons que  $L$  est NP-complet. Alors  $L \in \text{NP}$ , et donc  $\bar{L} \in \text{co-NP}$ . Maintenant, soit  $A \in \text{co-NP}$ . On veut montrer que  $A$  se réduit à  $\bar{L}$ . Par définition, on a  $\bar{A} \in \text{NP}$ , et donc  $\bar{A} \leq_P L$  puisque  $L$  est NP-complet. Soit  $f$  une fonction de réduction polynomiale telle que  $w \in \bar{A} \iff f(w) \in L$ . Il s'avère qu'on peut aussi utiliser  $f$  pour réduire  $A$  à  $\bar{L}$ . C'est-à-dire, on montre que  $w \in A \iff f(w) \in \bar{L}$ .

Soit  $w \in A$ . Alors  $w \notin \bar{A}$ , et donc  $f(w) \notin L$ , ce qui implique que  $f(w) \in \bar{L}$ . Dans l'autre sens, soit  $w \notin A$ . Alors  $w \in \bar{A}$ , et donc  $f(w) \in L$ , ce qui implique que  $f(w) \notin \bar{L}$ . Ceci montre qu'un langage arbitraire dans co-NP se réduit à  $\bar{L}$ , et donc que  $\bar{L}$  est co-NP-difficile.

( $\Leftarrow$ ) : la preuve est presque identique à la précédente, donc nous donnons une version abrégée. Supposons que  $\bar{L}$  est co-NP-complet. Alors  $\bar{L} \in \text{co-NP}$  et  $L \in \text{NP}$ . Maintenant, soit  $A \in \text{NP}$ . On veut montrer que  $A$  se réduit à  $L$ . On a  $\bar{A} \in \text{co-NP}$ , et donc il existe une réduction  $f$  telle que  $w \in \bar{A} \iff f(w) \in \bar{L}$ . Ceci est équivalent à  $w \in A \iff f(w) \in L$ . Il s'ensuit que  $f$  est une réduction de  $A$  vers  $L$ .

**Exercice 3**

Montrez que  $A_{NTM} = \{\langle M, x \rangle : M \text{ encode une MT non-déterministe qui accepte } x\}$  est NP-difficile.

**Solution.**

Soit  $L \in \text{NP}$ , et soit  $M$  l'encodage d'une MT non-déterministe dont le langage est  $L$ . Soit  $x \in \Sigma^*$ . Notre réduction  $f$  transforme  $x$  en  $f(x) = \langle M, x \rangle$ . Puisque  $M$  est de taille constante,  $f$  peut être exécutée en temps polynomial par rapport à  $x$ . On montre que  $x \in L \iff f(x) \in A_{NTM}$ .

Si  $x \in L$ , alors  $M$  accepte  $x$ . Donc,  $f(x) = \langle M, x \rangle \in A_{NTM}$ . Si  $x \notin L$ , alors  $M$  n'accepte pas  $x$ . Donc,  $f(x) = \langle M, x \rangle \notin A_{NTM}$ . Ceci démontre l'équivalence.

#### Exercice 4

Montrez que  $\text{IND-SET} \in \text{PSPACE}$ .

#### Solution.

Soit  $\langle G, k \rangle$  une instance de  $\text{IND-SET}$ . On peut vérifier si  $G$  contient un ensemble indépendant de taille  $k$  ou plus par force brute, come suit :

- Pour chaque sous-ensemble  $X$  de  $V(G)$  :
  - Vérifier si  $|X| \geq k$  et si  $X$  est un ensemble indépendant.
  - Si oui, Accepter.
- Rejeter.

Notez que l'on pourrait se contenter d'énumérer les sous-ensembles de taille  $k$ , ce qui ne changerait rien au résultat. Il n'est pas difficile d'énumérer chaque sous-ensemble possible en espace polynomial. Par exemple, on peut stocker un vecteur de bits de taille  $n$  démarrant à 0, l'interpréter comme un entier entre 1 et  $2^{n+1} - 1$ , et l'incrémenter à chaque tour de boucle (ici,  $n$  est le nombre de sommets). Chaque vecteur de bits représente un sous-ensemble possible : si le  $i$ -ème bit est à 1, alors on inclut le  $i$ -ème sommet. L'espace requis pour faire cette énumération est polynomial, et chaque vérification se fait clairement en temps, et donc en espace, polynomial.

#### Exercice 5

Soit  $\text{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(2^{n^k})$ . Montrez que  $\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME}$ , possiblement en utilisant la notion de certificat.

#### Solution.

Soit  $L \in \text{NP}$ , et soit  $V$  un vérificateur pour  $L$ , c'est-à-dire une MT déterministe telle que  $w \in L \iff$  il existe un mot  $c$  de taille  $O(|w|^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tel que  $V$  accepte  $\langle w, c \rangle$  en temps  $O(|w|^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $c$  est toujours de taille au plus  $\alpha|w|^k$ , où  $\alpha$  est la constante cachée dans la notation  $O$ .

On veut montrer que  $L \in \text{EXPTIME}$ . Soit la MT  $M$  qui, sur entrée  $w$ , simule  $V$  sur toutes les valeurs possibles de  $\langle w, c \rangle$ , où  $c$  est de taille au plus  $\alpha|w|^k$ , et accepte  $w$  si et seulement si  $V$  a accepté au moins une telle paire. Puisque  $V$  est un vérificateur, il s'ensuit que  $M$  décide  $L$ .

Le nombre de mots de taille au plus  $\alpha n^k$  est borné par  $O(|\Sigma|^{\beta n^k})$  pour une certaine constante  $\beta$  (si vous ne le voyez pas, faites-le en exercice). Ceci est  $O(2^{\log |\Sigma| \cdot \beta n^k})$ . Puisque  $|\Sigma|$  et  $\beta$  sont des constantes, il existe  $k' \geq k$  tel que ceci est  $O(2^{n^{k'}})$ . La MT  $M'$  décide donc  $L$  en un temps borné par  $O(n^d \cdot 2^{n^{k'}}) = O(2^{d \log n \cdot 2^{n^{k'}}})$ , ce qui est  $O(2^{n^{k''}})$ ,  $k'' \in \mathbb{N}$ . Ceci démontre que  $L \in \text{EXPTIME}$ .

### Exercice 6

Dans le problème de la couverture minimum, on reçoit des ensembles, et on veut choisir un minimum de ces ensembles pour couvrir tous les éléments. Plus formellement, soit  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$  une collection d'ensembles, et soit  $U$  un ensemble qu'on appelle *l'univers*. Le langage correspondant au problème de la couverture minimum est le suivant :

$$\text{SET-COVER} = \{ \langle \mathcal{S}, U, k \rangle : \text{il existe } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ tel que } |\mathcal{S}'| \leq k \text{ et } \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U \}$$

Montrez que SET-COVER est NP-complet.

#### Solution.

Il est clair que SET-COVER est dans NP, car une sous-collection  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$  peut servir de certificat : il est facile de vérifier que  $|\mathcal{S}'| \leq k$  et que  $\mathcal{S}'$  couvre  $U$ .

On montre que SET-COVER est NP-difficile, par réduction via CNF-SAT (CNF-SAT est l'ensemble des formules satisfaisables sous la forme CNF, i.e. un ET de plusieurs clauses). On pourrait utiliser 3-SAT, mais en fait le 3 n'est pas vraiment utile ici.

Soit  $\phi$  une formule CNF-SAT, et soient  $x_1, \dots, x_n$  les variables utilisées par  $\phi$ . De plus, soient  $C_1, \dots, C_m$  les clauses de  $\phi$ .

On crée une instance correspondante  $\langle \mathcal{S}, U, k \rangle$  de SET-COVER. Les éléments de l'univers sont  $U = \{C'_1, \dots, C'_m, x'_1, \dots, x'_n\}$ , chaque élément  $C'_i$  correspondant à une clause et chaque élément  $x'_i$  correspondant à une variable. Les ensembles sont  $\mathcal{S} = \{S_1, \bar{S}_1, \dots, S_n, \bar{S}_n\}$ , où  $S_i$  correspond à  $x_i$  et  $\bar{S}_i$  à  $\bar{x}_i$ . Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , le contenu de  $S_i$  et  $\bar{S}_i$  sont

$$\begin{aligned} S_i &= \{x'_i\} \cup \{C'_j : C_j \text{ est satisfaite par } x_i\} \\ \bar{S}_i &= \{x'_i\} \cup \{C'_j : C_j \text{ est satisfaite par } \bar{x}_i\} \end{aligned}$$

On pose  $k = n$ .

On montre maintenant que  $\phi$  est satisfaisable si et seulement si  $U$  peut être couvert avec au plus  $n$  ensembles de  $\mathcal{S}$ .

( $\Rightarrow$ ) : supposons qu'il existe une affectation  $A$  de  $x_1, \dots, x_n$  qui satisfait  $\phi$ . On construit  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$  de la façon suivante. Pour chaque  $i$ , où  $1 \leq i \leq n$ , on ajoute  $S_i$  à  $\mathcal{S}'$  si  $x_i$  est positif dans  $A$ , et on ajoute plutôt  $\bar{S}_i$  à  $\mathcal{S}'$  si  $x_i$  est négatif dans  $A$ . Il est clair que  $|\mathcal{S}'| \leq n$ . De plus,  $\mathcal{S}'$  couvre tous les éléments  $\{x'_1, \dots, x'_n\}$  car on a ajouté un ensemble  $S_i$  ou  $\bar{S}_i$  pour chaque variable  $x_i$ . Chaque élément-clause  $C'_i$  est aussi couvert : puisque  $A$  satisfait  $\phi$ , une variable  $x_j$  est affectée de façon à satisfaire la clause  $C_i$ , ce qui implique que  $S_j$  ou  $\bar{S}_j$ , selon le cas, couvre  $C'_i$ . L'existence de  $\mathcal{S}'$  montre que  $\langle \mathcal{S}, U, n \rangle$  est dans SET-COVER.

( $\Leftarrow$ ) : supposons qu'il existe  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$  de taille au plus  $n$  qui couvre  $U$ . On remarque que pour couvrir  $x'_1, \dots, x'_n$ , il faut ajouter au moins un de  $S_i$  ou  $\bar{S}_i$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$ . Puisque  $|\mathcal{S}'| \leq n$ , ceci veut dire qu'on a en fait dans  $\mathcal{S}'$  exactement un de  $S_i$  ou  $\bar{S}_i$ , mais pas les deux (si on avait les deux, on aurait

strictement plus de  $n$  ensembles dans  $\mathcal{S}'$  car il faut quand même choisir un de  $S_j$  or  $\bar{S}_j$  pour chaque  $x_j \neq x_i$ ).

Pour construire une assignation qui satisfait  $\phi$ , on affecte  $x_i$  à vrai si  $S_i \in \mathcal{S}$ , et  $x_i$  à faux si  $\bar{S}_i \in \mathcal{S}$ , pour chaque  $1 \leq i \leq n$ . Notons que  $x_i$  n'est pas à la fois vrai et faux. De plus, chaque clause  $C_j$  est satisfaite par le  $x_i$  tel que  $S_i$  ou  $\bar{S}_i$  couvre  $C'_j$ , selon le cas. Donc,  $\phi$  est satisfaisable.

### Exercice 7

Dans un graphe, un sous-ensemble de sommets  $X \subseteq V(G)$  est *dominant* si chaque sommet de  $V(G) \setminus X$  a au moins un voisin dans  $X$ . Considérez le langage

DOM-SET =  $\{ \langle G, k \rangle : G \text{ est un graphe dans lequel il existe}$   
 $\text{un ensemble dominant } X \subseteq V(G) \text{ de taille } k \text{ ou moins} \}$

Montrez que DOM-SET est NP-complet.

#### Solution.

Cette réduction est très similaire à celle de SET-COVER, donc nous donnons une version abrégée et plus informelle.

On réduit de CNF-SAT. Sur instance  $\phi$ , on crée un graphe  $G$  dans lequel il y a les sommets  $s_1, \bar{s}_1, \dots, s_n, \bar{s}_n$ . Pour chaque  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on ajoute une arête entre  $s_i$  et  $\bar{s}_i$ . On ajoute ensuite les sommets  $c_1, \dots, c_m$ , et une arête entre  $s_i$  et  $c_j$  si  $x_i$  satisfait  $C_j$ , ou entre  $\bar{s}_i$  et  $c_j$  si  $\bar{x}_i$  satisfait  $C_j$ . De plus, on ajoute les sommets  $x'_1, \dots, x'_n$  tels que  $x'_i$  est voisin de  $s_i$  et  $\bar{s}_i$ . On cherche à savoir si  $G$  a un ensemble dominant de taille au plus  $n$ .

Si  $\phi$  est satisfaisable par une assignation  $A$ , on les éléments correspondants dans  $s_1, \bar{s}_1, \dots, s_n, \bar{s}_n$  pour dominer  $G$ . C'est-à-dire, pour construire un ensemble dominant  $X$ , si  $x_i = T$ , on choisit  $s_i$  dans  $X$  et si  $x_i = F$ , on choisit  $\bar{s}_i$  dans  $X$ . Chacun de  $s_i$  est soit dans  $X$ , ou dominé par  $\bar{s}_i$ . IL en est de même pour chaque  $\bar{s}_i$ . Chaque  $x'_i$  est dominé par  $s_i$  ou  $\bar{s}_i$ . Finalement, chaque sommet  $c_j$  est dominé par le  $s_i$  ou  $\bar{s}_i$  qui correspond au choix de valeur de  $x_i$  de  $A$  qui a permis de satisfaire  $C_j$ . On a donc un ensemble dominant de taille  $n$ .

Si  $G$  a un ensemble dominant  $X$  de taille  $n$  ou moins, il doit contenir un sommet entre  $s_i$ ,  $\bar{s}_i$  ou  $x'_i$  pour dominer  $x'_i$ . Si  $X$  contient  $x_i$ , on peut voir que  $(X \setminus \{x'_i\}) \cup \{s_i\}$  est aussi un ensemble dominant, car chaque voisin de  $x'_i$  est aussi un voisin de  $s_i$  (à part  $s_i$ ). On peut donc supposer que  $X$  contient au moins 1 de  $s_i$  ou  $\bar{s}_i$  pour tout  $i$ . Puisque  $|X| \leq n$ ,  $X$  doit en fait contenir exactement un de  $s_i$  ou  $\bar{s}_i$ . Pour satisfaire  $\phi$ , on affecte  $x_i = T$  si  $s_i \in X$  et  $\bar{x}_i = F$  si  $\bar{s}_i \in X$ . Puisque les sommets de  $X$  dominent tous les sommets  $c_j$ , l'assignation correspondante satisfait  $\phi$ .

### Exercice 8

Une collection d'ensembles  $\{S_1, \dots, S_\ell\}$  est dite *disjointe* si, pour tout  $i, j$  avec  $1 \leq i < j \leq \ell$ , on a  $S_i \cap S_j = \emptyset$ . Dans le problème SET-PACKING, on reçoit une collection d'ensembles  $\mathcal{S}$  et on doit choisir une sous-collection disjointe de taille maximum. En terme de langage, on a :

SET-PACKING =  $\{\langle \mathcal{S}, k \rangle : \text{il existe une sous-collection } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ disjointe telle que } |\mathcal{S}'| \geq k\}$

Montrez que SET-PACKING est NP-complet.

#### Solution.

SET-PACKING est dans NP car une sous-collection  $\mathcal{S}$  peut servir de certificat : on peut vérifier en temps polynomial que  $|\mathcal{S}| \geq k$  et que chaque paire d'ensembles de  $\mathcal{S}$  ont une intersection vide.

On montre que SET-PACKING est NP-difficile par réduction via IND-SET. Soit  $\langle G, k \rangle$  une instance de IND-SET. Notre collection  $\mathcal{S}$  sera sur l'univers  $U = E(G)$ , i.e. on doit couvrir un élément correspondant à chaque arête. Pour chaque sommet  $u \in V(G)$ , on ajoute à  $\mathcal{S}$  un ensemble

$$S_u = \{uv : v \text{ est un voisin de } u \text{ dans } G\}$$

i.e.  $S_u$  permet de couvrir chaque arête touchant à  $u$ . On montre que  $G$  a un ensemble indépendant de taille  $k$  si et seulement si il existe une sous-collection disjointe  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$  telle que  $|\mathcal{S}'| \geq k$  (donc ici, le  $k$  est le même pour les deux problèmes).

( $\Rightarrow$ ) soit  $I$  un ensemble indépendant de  $G$ , avec  $|I| \geq k$ . Soit  $\mathcal{S}' = \{S_u : u \in I\}$ . Il est évident que  $|\mathcal{S}'| \geq k$ . De plus, puisque pour toute paire  $u, v \in I$ , il n'y a pas d'arête entre  $u$  et  $v$ , les arêtes incidentes à  $u$  sont disjointes des arêtes incidentes à  $v$ . Donc,  $S_u \cap S_v = \emptyset$ . On conclut que  $\mathcal{S}'$  est une sous-collection disjointe de taille au moins  $k$ .

( $\Leftarrow$ ) soit  $\mathcal{S}'$  une sous-collection disjointe de  $\mathcal{S}$  de taille au moins  $k$ . Soit  $I = \{u : S_u \in \mathcal{S}'\}$ . Bien sûr,  $|I| \geq k$ . Par construction de  $\mathcal{S}$ , si  $S_u, S_v \in \mathcal{S}'$ , alors  $u$  et  $v$  ne partagent pas d'arête. Puisque ceci est vrai pour tout  $u, v \in I$ , il s'ensuit que  $I$  est un ensemble indépendant.

### Exercice 9

Soit  $G$  un graphe. Un *arbre couvrant* de  $G$  est un sous-graphe  $G'$  de  $G$  tel que  $G'$  est un arbre connectant tous les sommets de  $G$ . Dans le problème MINDEG-AC, on veut savoir s'il existe un arbre couvrant dont le degré maximum ne dépasse pas  $k$  :

MINDEG-AC =  $\{\langle G, k \rangle : G \text{ est un graphe dans lequel il existe un arbre couvrant tel que chaque sommet a un maximum de } k \text{ voisins}\}$

Montrez que MINDEG-AC est NP-complet.

*Suggestion* : considérez un  $k$  très petit.

#### Solution.

Je ne donne que le sketch d'une preuve. MINDEG-AC est dans NP car un arbre couvrant peut servir de certificat.

Pour la NP-difficulté, on peut réduire de HAMPATH. Dans le problème HAMPATH, on veut savoir si  $G$  contient un chemin qui contient chaque sommet exactement une fois, ce qui est NP-complet. La réduction conserve le même graphe, mais pose  $k = 2$ . Il suffit ensuite d'observer qu'un arbre couvrant est un chemin Hamiltonien si et seulement si son degré maximum est 2.

### Exercice 10

Dans le problème 2-SAT, on reçoit une formule  $\phi$  en forme CNF dans laquelle chaque clause a deux variables. On veut savoir si  $\phi$  est satisfaisable. Montrez que 2-SAT est dans P.

#### Solution

J'ai écrit assez de solutions à ce point-ci. Je redirige vers : <http://philippe.gambette.free.fr/SCOL/Graphes/Gambette%20-%20Un%20graphe%20pour%20resoudre%202SAT.pdf>.

### Exercice 11

Dans le problème MAX-2-SAT, on reçoit un ensemble de clauses CNF avec chacune deux variables, et on veut en satisfaire un maximum. En terme de langage, on a

MAX-2-SAT =  $\{\langle C, k \rangle : C \text{ est un ensemble de clauses CNF, et il existe une assignation qui en satisfait au moins } k\}$

Montrez que MAX-2SAT est NP-complet.

*Suggestion* : ce n'est pas trivial! Une réduction à partir de MAX-2-XOR est possible.

#### Solution

Ce problème était volontairement plus difficile. Il fallait creuser un peu. En cherchant, on peut voir que le problème MAX-CUT est NP-complet. Voici une preuve : <http://www.cs.cornell.edu/courses/cs4820/2014sp/notes/reduction-maxcut.pdf>.

Ceci implique que le problème MAX-2-XOR est NP-complet. Dans le problème MAX-2-XOR, on reçoit un ensemble de clauses XOR avec 2 variables, de la forme  $(x_i \oplus x_j)$ , et on veut décider si on peut satisfaire au moins  $k$  clauses (notez que  $x_i$  ou  $x_j$  peuvent apparaître sous la forme négative). MAX-CUT se réduit trivialement à MAX-2-XOR, alors personne n'a écrit la preuve en détail. Vous trouverez l'idée à <https://cs.stackexchange.com/questions/100233/np-completeness-and-reduction-of-max-xor-sat-and-max-2-xor-sat>.

Ensuite, sachant que MAX-2-XOR est NP-complet, on le réduit à MAX-2-SAT. Considérez une instance de MAX-2-XOR  $\phi$  sur variables  $x_1, \dots, x_n$  et clauses  $C_1, \dots, C_m$ , où on veut décider s'il est possible de satisfaire  $k$  clauses. Ici, chaque  $C_i$  a la forme  $(x_a \oplus x_b)$ , ou  $(\bar{x}_a \oplus x_b)$ , ou  $(\bar{x}_a \oplus \bar{x}_b)$  (un cas symétrique a été omis).

Pour construire une instance  $\phi'$  de MAX-2-SAT, on transforme chaque  $C_i = (a \oplus b)$  en deux clauses  $A_i = (a \vee b)$  et  $B_i = (\bar{a} \vee \bar{b})$ . Ici, on utilise  $a$  et une variable  $x_i$  ou sa négation  $\bar{x}_i$  (même chose pour  $b$ ). Donc si  $\phi$  a  $m$  clauses,  $\phi'$  en a  $2m$ . On veut décider s'il est possible de satisfaire  $m + k$  clauses de  $\phi'$ .

Supposons qu'une assignation  $A$  peut satisfaire  $k$  clauses de  $\phi$ . On garde la même assignation pour  $\phi'$ . Pour chaque  $C_i = (a \oplus b)$  satisfaite,  $a$  et  $b$  prennent une valeur différente. Donc, l'assignation satisfait à la fois  $(a \vee b)$  et  $(\bar{a} \vee \bar{b})$ . Pour chaque clause non-satisfaite  $C_i = (a \oplus b)$ ,  $a$  et  $b$  ont la même valeur. Donc on satisfait un seul de  $(a \vee b)$  et  $(\bar{a} \vee \bar{b})$ . On satisfait donc  $2k + (m - k) = m + k$  clauses de  $\phi'$ .

Dans l'autre sens, supposons qu'on peut satisfaire  $m + k$  clauses de  $\phi'$ . Forcément, il y a  $k$  paires de  $A_i$  et  $B_i$  telles que  $A_i = (a \vee b)$  et  $B_i = (\bar{a} \vee \bar{b})$  sont toutes les deux satisfaites. Ceci implique que  $a$  et  $b$  ont une valeur différente, et donc que  $(a \oplus b)$  est satisfaite. En gardant la même assignation, on satisfait donc  $k$  clauses XOR de  $\phi$ .