IFT503/711 - Exercices sur l'approximation

Manuel Lafond

Hiver 2021

Exercice 1

Dans le problème MAX-CUT, on a en entrée un graphe $G = (V, E)$ et on cherche une bipartition (V_1, V_2) de V qui maximisent le nombre d'arêtes qui traversent V_1 et V_2. C'est-à-dire, $V_1 \cup V_2 = V$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, et on veut maximiser $\{uv \in E(G) : u \in V_1, v \in V_2\}$.

Montrez que MAX-CUT admet une $\frac{1}{2}$-approximation.
Indice : démarrez avec une bipartition arbitraire. Si déplacer un sommet améliore le nombre d'arêtes traversante, déplacez-le. Répétez jusqu'à ce que vous ne puissiez plus. Argumentez que la solution alors obtenue donne un $\frac{1}{2}$-approximation.

Exercice 2

On sait qu'il existe une constante $\rho < 1$ telle que pour MAX-3-SAT, il est difficile de déterminer si une instance est satisfaisable, ou si on peut satisfaire au plus une fraction ρ de ses clauses. Ceci correspond à un langage gap où, pour toute instance ϕ, on peut soit satisfaire m clauses, ou au plus ρm clauses.

Montrez qu'il existe une constante α telle que MAX-CLIQUE n'admet pas de α-approximation.

Exercice 3

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *produit* de G avec lui-même est le graphe dénoté par $G \times G$ dans lequel $V(G \times G) = V \times V$ et

$$E(G \times G) = \{\{(a, b), (x, y)\} : (ax \in E \text{ ou } a = x) \text{ et } (by \in E \text{ ou } b = y)\}$$

On écrit $G^k = G \times \ldots \times G$ (k fois). Il est possible de montrer que pour tout entier k, G a un clique de m sommets $\iff$ G^k a une clique de m^k sommets. (suggestion : démontrez-le !)

En utilisant ce fait, montrez que si P $\neq$ NP, MAX-CLIQUE n'admet pas de c-approximation pour tout $c < 1$.
Suggestion : transformez des instances gap de l'exercice précédent pour créer des instances avec un gap amplifié.

Exercice 4

Montrez que PCP$(poly(n), 1) \subseteq$ NEXPTIME.

Exercice 5

Montrez que P $=$ PCP$(0, \log n)$.