IFT503/711 - Exercices sur l'approximation/ETH

Manuel Lafond

Hiver 2020

Exercice 1

Montrez que P $=$ PCP$(0, \log n)$.

Exercice 2

Montrez que PCP$(poly(n), 1) \subseteq$ NEXPTIME.

Exercice 3

Montrez que MAX-CUT admet une $\frac{1}{2}$-approximation.
Indice : démarrez avec une bipartition arbitraire. Si déplacer un sommet améliore le nombre d'arêtes traversante, déplacez-le. Répétez jusqu'à ce que vous ne puissiez plus. Argumentez que la solution alors obtenue donne un $\frac{1}{2}$-approximation.

Exercice 4

On sait qu'il existe une constante $\rho < 1$ telle que pour MAX-3-SAT, il est difficile de déterminer si une instance est satisfaisable, ou si on peut satisfaire au plus une fraction ρ de ses clauses. Montrez qu'il existe une constante α telle que MAX-CLIQUE n'admet pas de α-approximation.

Exercice 5

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *produit* de G avec lui-même est le graphe dénoté par $G \times G$ dans lequel $V(G \times G) = V \times V$ et

$$E(G \times G) = \{\{(a, b), (x, y)\} : (ax \in E \text{ ou } a = x) \text{ et } (by \in E \text{ ou } b = y)\}$$

On écrit $G^k = G \times \ldots \times G$ (k fois). Il est possible de montrer que pour tout entier k, G a un clique de m sommets $\iff$ G^k a une clique de m^k sommets. (suggestion : démontrez-le !)

En utilisant ce fait, montrez que si P $\neq$ NP, MAX-CLIQUE n'admet pas de c-approximation pour tout $c < 1$.
Suggestion : transformez des instances gap de l'exercice précédent pour créer des instances avec un gap amplifié.

Exercice 6

Montrez que si la ETH est vraie, alors CLIQUE ne peut pas être décidé en temps $2^{o(n)} poly(n)$, où n est le nombre de sommets.

Exercice 7

Considérez le problème SET-COVER défini dans la série d'exercices précédente. Pour une instance donnée de SET-COVER, on dénote par n son nombre d'ensembles et par m son nombre d'éléments à couvrir.

Montrez que si la ETH est vraie, alors SET-COVER ne peut pas être décidé en temps $2^{o(n+m)} poly(n)$.