IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 2

Enseignant:	Dave Touchette
Date de remise:	jeudi 13 février 2020 à 10h30
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1$^{\text{er}}$ cycle individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	à remettre en classe, en copie imprimée ou copie manuscrite lisible
Pointage:	sur 55 points au 1$^{\text{er}}$ cycle (+ 5pts bonus pour ★) sur 65 points aux cycles supérieurs

Question 1.

(a) Si $A \leq_m B$ et B est un langage régulier (i.e., il existe un automate fini déterministe D tel que $B = L(D)$), est-ce que ça implique que A est un langage régulier ? Justifiez votre réponse. 4 pts

(b) Montrez que pour toute paire de langages A et B, il existe un langage C tel que $A \leq_m C$ et $B \leq_m C$. 5 pts

Question 2.

(a) Montrez que n'importe quel sous-ensemble infini de $MIN_{TM} = \{\langle M\rangle : M \text{ est une } MT \text{ minimale}\}$ n'est pas reconnaissable. 5 pts

(b) Soit $G = \{\langle M\rangle : M \text{ est une } MT \text{ qui accepte } ww \text{ si elle accepte } w\}$. Montrez que G est indécidable. 5 pts

(c) Soit $SINGLET_{TM} = \{\langle M\rangle : M \text{ est une } MT \text{ tel que } |L(M)| = 1\}$. Montrez que $SINGLET_{TM}$ est indécidable. 5 pts

(d) On dit d'un langage P qui contient des chaînes encodant des MTs qu'il est une propriété des langages des MTs si pour toute paire de MTs M_1 et M_2 satisfaisant $L(M_1) = L(M_2)$, il est vrai que $\langle M_1\rangle \in P$ si et seulement si $\langle M_2\rangle \in P$. Pour MIN_{TM}, G et $SINGLET_{TM}$, dites si ces langages sont des propriétés des langages des MTs. 5 pts

Question 3.

Soit $J = \{w : \text{ soit } w = 0x \text{ pour } x \in A_{TM}, \text{ ou } w = 1y \text{ pour } y \in \overline{A_{TM}}\ \}$. Montrez que ni J ni $\bar{J}$ n'est Turing-reconnaissable. 10 pts

Question 4.

(a) Rappelons que l'arithmétique de Peano, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$, est indécidable. Considérons une logique similaire où, plutôt que la multiplication de variables « xy », nous avons accès au carré « x^2 » d'une variable. Expliquez formellement pourquoi cette logique, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \cdot^2, \leq)$, est indécidable. 6 pts

(b) Nous avons vu que l'arithmétique de Presburger, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{N}, +, \leq)$, est décidable. Expliquez formellement pourquoi cette logique étendue aux entiers, c.-à-d. $\mathsf{FO}(\mathbb{Z}, +, \leq)$, est aussi décidable. 10 pts

★ Question 5. (cycles supérieurs)

Soit $A'_{TM} = \{\langle M, w\rangle : M \text{ est une MT à oracle et } M^{A_{TM}} \text{ accepte } w\}$. Montrez que A'_{TM} est indécidable relativement à A_{TM}. ★ 10 pts